Colles de Maths - semaine 9 - MP*1
Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Réduction des endomorphismes

Exercice 1 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application qui à $f \in E$ associe la fonction définie par

$$T(f) : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\, f(t)\, \mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Montrer que T est un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.

Exercice 2 Soit E l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{Z}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, bornées. Soit T l'application qui à $u \in E$ associe la suite $\left(\dfrac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$. Déterminer les éléments propres de T.

Exercice 3 Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à coefficients réels strictement positifs telle que

$$\forall i \in \{1,...,n\},\ \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A et que l'espace propre associé (sur $\mathbb{C}$) est une droite.
2. Montrer que toute valeur propre complexe de A est de module inférieur à 1.
3. Montrer que 1 est la seule valeur propre de module 1.

Théorèmes d'interversion

Exercice 4 Déterminer $\lim_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$.

Exercice 5 Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$ et $a>0$. Déterminer $\lim_{a\to 0^+} \displaystyle\int_0^a \frac{f(t)}{\sqrt{t\,(a-t)}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty \frac{2\,(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 7 Soit $\alpha > 0$. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1}.$$

En déduire une expression de $\ln 2$ sous forme de série.

Exercice 8 Donner un développement asymptotique à deux termes quand n tend vers l'infini de

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t+t^n} \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 9 Soit $T > 0$ et $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ continue.

1. Déterminer la limite simple de la suite $g_n : t \in [0, T] \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^T f(u)\, e^{-kn(t-u)} \,\mathrm{d}u$.
2. On suppose que $\left(\int_0^T f(t)\, e^{nt} \,\mathrm{d}t \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que $f = 0$.